Invest. pens. crit. (ISSN 1812-3864)
Vol. 7, No. 1, enero- abril 2019
pp. 109-113

Grafos hamiltonianos aplicado al turismo de Panamá.

Julio Enrique Trujillo González[1*]

1.Profesor, Facultad de Ingeniería y Tecnología, Universidad Católica Santa María la Antigua y Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Universidad de Panamá.

*Autor para correspondencia. Email: julioetrujillog@gmail.com

Recibido: 18 de febrero de 2019
Aceptado: 15 de marzo de 2019

Resumen
Un problema clásico de Teoría de Grafos es encontrar un camino que pase por varios puntos, sólo una vez, empezando y terminando en un lugar (camino hamiltoniano). Al agregar la condición de que sea la ruta más corta, el problema se convierte uno de tipo TSP (Traveling Salesman Problem). En este trabajo nos centraremos en un problema de tour turístico por la ciudad de Panamá, transformándolo a un problema de grafo de tal manera que represente la situación planteada.
Palabras clave: Grafos, ciclo hamiltoniano, camino hamiltonia, Traveling Salesman Problem.

Abstract
A classic problem of Graph Theory is to find a path that passes through several points, only once, starting and ending in one place (hamiltonian path). When adding the condition that it is the shortest route, the problem becomes one of type TSP (Traveling Salesman Problem). In this paper we will focus on a tourist tour problem in the city of Panama, transforming it into a graph problem in such a way as to represent the situation posed.
Keywords: Hamiltonian cycle, Hamiltonian path, Traveling Salesman Problem.

1 Introducción

En este trabajo presentaremos una aplicación de la teoría de grafos al turismo de Panamá, en particular los grafos hamiltonianos para obtener tour. Algunos algoritmos para obtener una solución se pueden encontrar en (Gibbons, 1994). Nuestro objetivo es mostrar la importancia de la modelización y como utilizar algoritmos para resolver el problema. Trataremos un problema ilustrativo, lo llevaremos a un problema de grafos, para analizar la existencia de tours. Utilizaremos programas hechos por el autor en C++ para obtener una solución.

Invest. pens. crit. (ISSN 1812-3864)
Vol. 7, No. 1, enero- abril 2019
pp. 109-113

2 Conceptos básicos

Un grafo G consiste de un conjunto finito no vacío $V(G)$ de elementos llamados vértices (o nodos), y un conjunto finito $E(G)$ de pares sin orden de elementos de $V(G)$ llamados aristas. También se suele definir como una triada $G = (\Gamma, V(G), E(G))$ donde

$$\Gamma: E(G) \to \{\{u, v\}: u, v \in V(G)\}$$

Notación. Las aristas se denotan por $\{u, v\}$ o por uv.

Su suele representar el grafo G mediante un diagrama de puntos (vértices) y líneas (aristas).

Un camino en G es un conjunto finito de aristas de la forma $v_0v_1, v_1v_2, .., v_{n-1}v_n$ en el cual dos aristas son adyacentes o idénticas. Si $v_0 = v_n$ se dice que el camino es un ciclo y el resto de vértices son distintos entres ellos y con v_0, llamamos ciclo hamiltoniano si el ciclo contiene todos los vértices del grafo G y de manera análoga, un camino es hamiltoniano si pasa por todos los vértices sólo una vez. Por último, un grafo es hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

Para obtener un camino hamiltoniano basta considerar el problema de los ciclos hamiltonianos. Para eso enunciaremos algunos teoremas que nos ayudara,

Teorema 1 (Ore, 1960) Si G es un grafo simple con n $(n \geq 3)$ vértices, y

$$grad(v) + grad(w) \geq n$$

Para cada par de no adyacentes vértices v y w, then G es Hamiltoniano.

La función $grad: V(G) \to \mathbb{N}$ nos dice cuantos vértices se conectan con el vértice v, es decir, es el cardinal del conjunto $\{vx: x \in V(G)\}$.

Demostración. Ver (Wilson, 1996)

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente:

Teorema 2 (Dirac, 1952) Si G es un grafo simple con n $(n \geq 3)$ vértices, y si

$grad(v) \geq n/2$ para cada vértice v, entonces G es Hamiltoniano.

El teorema 2 nos da las condiciones para la existencia de un ciclo hamiltoniano. Ver (Diestel, 2000)

Otro resultado que nos dirá sobre la existencia sobre un ciclo hamiltoniano es el siguiente:

Teorema 3 Sea G un grafo no dirigido. Existe un camino hamiltoniano en G si y sólo si G^* es hamiltoniano, donde $V^*(G^*) = V(G) \cup \{a\}$ y $E^*(G^*) = E(G) \cup \{\{a, x\}: x \in V(G)\}$.

Bosquejo de prueba.

Siguiendo la Fig 1. Supongamos que existe un camino hamiltoniano H en G con extremo v_1 y v_n. Este camino también le pertenece a G^* (ver Fig 2.), basta añadir v_1a y v_na para tener un ciclo hamiltoniano en G^*.

Invest. pens. crit. (ISSN 1812-3864)
Vol. 7, No. 1, enero- abril 2019
pp. 109-113

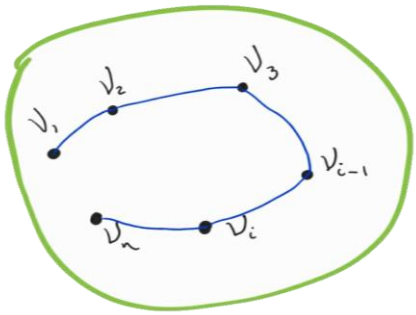

Fig. 1 Ciclo hamiltoniano.

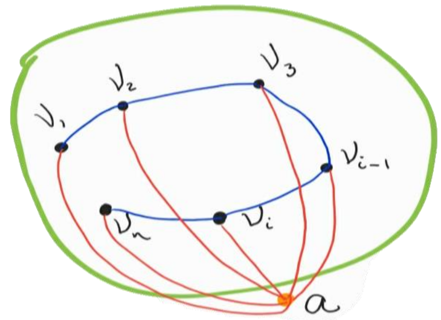

Fig. 2 Camino hamiltoniano

Supongamos que existe el ciclo hamiltoniano (ver Fig 2.) W en G^*, eliminando $v_1 a$ y $v_n a$ obtenemos un camino hamiltoniano como el que aparece en Fig 1.

3 Tour por la capital de Panamá

Supongamos que somos dueño de una agencia de organizar tour por los centros turísticos de Panamá. Queremos obtener una ruta que pase por todos los puntos siguientes: 1-Multicentro, 2-Casco Viejo, 3- Cinta costera, 4-Centro de visitantes de Miraflores, 5-Panamá vieja, 6-Albrook Mall, 7-Centro de visitantes del Parque Natural Metropolitano, 8-Centro Natural Punta Culebra, 9-Isla Flamenco, 10-Biomuseo, 11-Mirador de las Américas, 12-Cerro Ancón, 13-Calzada de Amador, 14-Museo del Canal Interoceánico de Panamá, 15-Parque Municipal de Summit.

Con la condición de pasa por todos ellos sin repetir ninguno, además que sea la ruta más corta con respecto a la distancia en kilómetros. En la tabla siguiente se resume las distancias entre los puntos antes mencionados.

Tabla 1. Distancias entre puntos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	4.1	3.1	12.4	6.1	5.3	4.7	13.8	14.9	11.5	10.6	5.6	13.5	4.4	22.1
2	4.1	0	2.3	10.2	11.1	5.6	5.1	10.7	11.9	7.7	7.5	2.8	10.5	0.29	27.5
3	3.1	2.3	0	10.8	8.8	6.2	5.7	12.1	13.3	9.9	8.9	4	11.9	2.8	20.2
4	12.4	10.2	10.8	0	19.7	8.6	12.4	16.4	17.6	14.2	13.2	8.7	16.2	12	11.2
5	6.1	11.1	8.8	19.7	0	9.8	8	17.5	18.6	15.2	14.2	11.2	17.2	10.1	22.2
6	5.3	5.6	6.2	8.6	9.8	0	1.6	12	13.2	9.8	8.8	4.3	11.8	7.6	18.3
7	4.7	5.1	5.7	12.4	8	1.6	0	12.2	13.3	9.9	9	7.4	11.9	7.7	21.8
8	13.8	10.7	12.1	16.4	17.5	12	12.2	0	2.1	3.2	8	8.4	0.7	7.9	25.7
9	14.9	11.9	13.3	17.6	18.6	13.2	13.3	2.1	0	4.3	9.1	9.6	1.8	9.1	26.9
10	11.5	7.7	9.9	14.2	15.2	9.8	9.9	3.2	4.3	0	4.9	5.3	3	5.1	22.6
11	10.6	7.5	8.9	13.2	14.2	8.8	9	8	9.1	4.9	0	8.5	10.6	8	25.4
12	5.6	2.8	4	8.7	11.2	4.3	7.4	8.4	9.6	5.3	8.5	0	7.7	3.5	18.6
13	13.5	10.5	11.9	16.2	17.2	11.8	11.9	0.7	1.8	3	10.6	7.7	0	7.2	25
14	4.4	0.29	2.8	12	10.1	7.6	7.7	7.9	9.1	5.1	8	3.5	7.2	0	20
15	22.1	27.5	20.2	11.2	22.2	18.3	21.8	25.7	26.9	22.6	25.4	18.6	25	20	0

Transformando nuestro problema de ruta en un de grafo, donde G con

$V(G) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ los puntos turísticos a visitar y $E(G)$ representa la ruta entre el punto turístico x y el punto turístico y, además asumimos que podemos ir en los sentidos, es decir que xy e yx representa la misma ruta.

Aplicando un programa elaborado en C++ nos proporciona la siguiente solución:

$$1-5-7-6-11-8-13-9-10-14-2-12-15-4-3$$

Con una distancia total de 88.09 km.

Podemos suponer varias escenas:

1. El punto de inicial y final puede ser cualquier lugar turístico. Entonces podemos utilizar el teorema 3, para incorporar un lugar turístico ficticio que se conecta con los demás lugares, para determinar un ciclo hamiltoniano.
   Vamos a considerar el grafo G con $V(G) = \{1,2,34,5,6,7,8,9\}$ y $E(G)$ como se definió al principio. El nuevo grafo G^* con $V^*(G^*) = \{1,2,34,5,6,7,8,9,10\}$ y $E^*(G^*)$ con 10-lugar turístico ficticio cuya distancia a todos los demás puntos son igual a 10 km. Obtenemos la solución: $9-8-2-3-5-1-7-6-4$ con distancia 58.8 km.
2. El punto inicial y final lo cambiamos por temporada. Ejemplo: Iniciamos en 3 y terminamos en 7, debemos agregar dos nuevas aristas que son {3, 10} y {7,10}, donde 10 representa el lugar turístico ficticio. En este caso el grafo G^* no posee ciclo hamiltoniano y tampoco camino hamiltoniano.
3. Podemos eliminar puntos turísticos e incorporar nuevos puntos turísticos.
4. Dos o más rutas con puntos en común.

4 Conclusiones

Los anteriores ejemplos muestran la aplicabilidad de conceptos básicos de la Matemática, que se pueden utilizar en diferentes situaciones que tienen igual raíz, por ejemplo: tour turístico, transbordo del metro bus, transbordo del metro de Panamá, transporte de mercancías, entre muchas otras. En el caso que no existiera el ciclo hamiltoniano se puede analizar la relajación de las condiciones o la eliminación, ya que con pequeñas modificaciones se pueden obtener un camino.

En el caso de que aplicáramos las ideas anteriores a una compañía de reparto o transporte, por ejemplo, estaríamos trabajando con más vértices, podrían ser 50, 100, o más. Por lo que el algoritmo exacto que hemos utilizado tendríamos que cambiarlo (no obtenemos una solución óptima en un tiempo razonable) por un metaheurístico, que nos proporcionaría una solución factible, pero el inconveniente que no garantiza que es la óptima.

5 Bibliografía

Bapat, R.B. *Graps and Matrices. Springer.* Universitext. 2010.

Bondy, J. A; Murty, U.S. *Graph Theory with Applications.*North-Holland. Estados Unidos de América 1982.

Invest. pens. crit. (ISSN 1812-3864)
Vol. 7, No. 1, enero- abril 2019
pp. 109-113

Diestel, Reinhard. *Graph Theory.* Springer-Verlag. Segunda Edición. Estados Unidos de América. 2000

Gibbons, Alan. *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press. Estados Unidos de América. 1994.

Ray, Saha Santanu. *Graph Theory with Algorithms and its Applications, In Applied Science and Technology.* Springer. Estados Unidos de América. 2013.

Wilson, Robin. *Introduction to Graph Theory.* Addison Wesley Longman Limited.Carta Edición. Inglatera. 1996.